NOTE STORICHE SUL BIRAPPORTO DELLA QUATERNA (CROSS RATIO)

Manfredo Massironi* - Ugo Savardi**
* Istituto di Psicologia, Università di Verona
** Dipartimento di Psicologia Generale, Università di Padova

Ci sembra utile ripercorrere, se pur sinteticamente, il cammino che, sul terreno del pensiero matematico-geometrico, ha portato alla scoperta degli invarianti geometrici e di quell'invariante particolare definito Birapporto della Quaterna (Cross Ratio).

Un lavoro di questo genere potrebbe inoltre riparare un poco alla sfortuna che ha perseguitato l'opera di Girard Desargues intitolata "Brouillon projet d'une atteinte aux evenements des rencontres d'une cone avec un pian et aux evenements des contrarietes de entre les actions des puissances ou forces" (1639), che Boyer, nella sua storia della matematica (1968), definisce "uno dei più sfortunati capolavori che siano mai stati prodotti".

Anche gli psicologi che fanno riferimento alle potenzialità euristiche del concetto di invarianza, per spiegare i fenomeni percettivi, non fanno mai riferimento a quest'opera. Ma per risalire alle radici prime del concetto di invariante geometrico bisogna citare innanzitutto Pappo di Alessandria matematico e geometra vissuto attorno al 320 dC, anno questo a cui si fa risalire la sua opera più importante dal titolo "Collezione".

Nel libro settimo della Collezione, Pappo formula delle proposizioni che possono essere considerate dei prodromi al concetto geometrico proiettivo di birapporto.

Uno dei teoremi dimostrato da Pappo e' così formulato: "su tre rette AB,CA ed AD conduciamo (trasversalmente) due altre rette HE e HD (fig. 1). Affermiamo allora che il rettangolo di lati HE e GF sta al rettangolo di lati HG e FÉ come il rettangolo di lati HB e DC sta' al rettangolo di lati HD e BC." (Freguglia, 1982, **pg.87).**

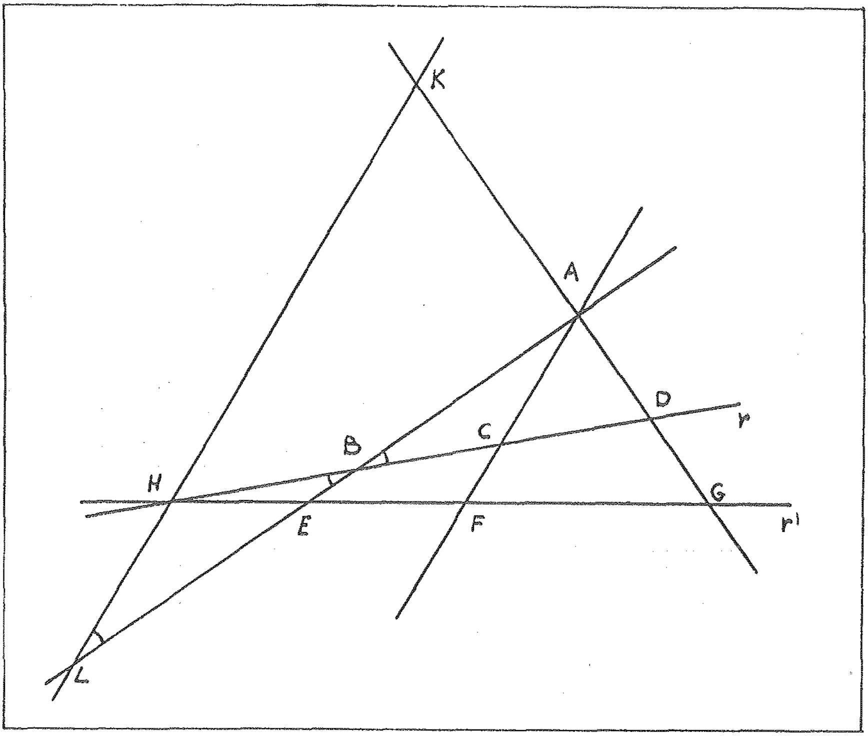


Figura 1.

Pappo propone due dimostrazioni che giungono al seguente risultato:

$$\frac{HE * GF}{HG * EF} = \frac{HB * CD}{HD * BC}$$

che esprime l'eguaglianza di due birapporti **(BDHC) = (EGHF)** e, poiché ciò vale per qualsiasi coppia di rette che intersecano le tre rette date, ne consegue che l'eguaglianza fra i birapporti e" invariante per tutte le rette intersecanti.

Il significato di tali risultati e' sicuramente proiettivo anche se gli interessi di Pappo non erano rivolti alla proiettività. Circa 1300 anni dopo, Desargues applica calcoli di tipo metrico a funzioni di natura proiettiva e formula il concetto di "involuzione fra punti", termine che definisce una relazione fra alcuni punti di una retta, relazione che rimane invariata quando gli stessi punti sono proiettati su un'altra retta.

Il contributo di Desargues allo sviluppo della geometria e' strettamente legato alla scoperta e al diffondersi della prospettiva lineare che aveva consentito all'arte prima, e alle scienze naturali poi, di impadronirsi progressivamente del mondo sensibile.

I pittori rinascimentali, fin dall'inizio del XV secolo si erano ritrovati a scoprire e a descrivere numerosi fenomeni visivi che sarebbero stati, in seguito, oggetto di studio da parte della psicologia della percezione. Recentemente gli psicologi hanno cominciato ad analizzare con interesse i legami che uniscono alcune loro teorizzazioni ad ipotesi sulla percezione dello spazio e della tridimensionalità', ed eventi e problemi visivi messi in evidenza dai prospettici rinascimentali. (Pirenne 1952; Pastore 1979,1984; Massironi 1983; Kubovy 1986; Hagen 1986). Anche l'opera di Desargues, come quella di altri filosofi e matematici francesi del secolo XVII, quali Niceron, Mercenne, Bosse, Cartesio stesso, deriva da quel fervore di interessi per i fenomeni della visione che la scoperta e la pratica assidua della prospettiva avevano alimentato per oltre due secoli. Non a caso una delie prime opere di Desargues si intitola "Methode universelle de mettre en prospective les objets donnes reellement, ou en devis avec leurs proportion, mesures, eloignements, sans employer aucun point qui soit hors du champ de l'ouvrage" (1636).

Desargues era un architetto ed un ingegnere militare di Lione che aveva concezioni poco ortodosse circa il ruolo della prospettiva sia nell'architettura che nella geometria. Il suo atteggiamento anticonformista lo portò a scrivere in maniera difficile e fantasiosa usando termini inconsueti e bizzarri nell'intento di indirizzare i suoi scritti non agli scienziati ma ai meccanici e agli artigiani interessati alle applicazioni della matematica e della geometria. Il risultato di queste scelte fu quello di essere rifiutato dai primi e di non essere compreso dai secondi; inoltre la formulazione di un titolo complicato ed infelice e la stampa di un limitato numero di copie, destinate solo agli amici, sono alcune delle ragioni della sfortuna che perseguitò il "Bruillon projet" e che ritardo' l'imporsi della geometria proiettiva di circa 200 anni. Ma la ragione fondamentale di questa sfortuna risiede nel fatto che il lavoro di Desargues si poneva al di fuori del paradigma dominante nella matematica del tempo.

Tale paradigma in seguito alle recenti scoperte di Cartesio e di Feremat prediligeva ed imponeva la geometria analitica e il calcolo infinitesimale a scapito di altre branche della ricerca matematica come la geometria pura. Infatti Cartesio, che conosceva Desargues, che aveva partecipato con lui all'assedio di La Rochelle nel 1628 e che aveva manifestato sempre della stima per quella personalità poco conformista, rimase sorpreso e deluso quando venne a sapere che il Bruillon Projet avrebbe trattato delle sezioni coniche senza fare uso dell'algebra. Il lavoro di Desargues trovò una opposizione tenace nei matematici del suo tempo; essi io rifiutarono al punto che alla fine del 600 le copie del suo libro erano tutte scomparse dalla circolazione.

Il Bruillon projet si fondava invece su di un'idea di grande semplicità ed eleganza che consentiva notevoli vantaggi di unitarietà e di semplificazione e che discendeva direttamente "from perspective in Renaissance art and from Kepler's principle of continuity. Everyone knows that a circle, when viewed obliquely, looks like an ellipse, or that the outline of the shadow of a lampshade will be a circle or a hyperbola according as it is projected upon the ceiling or a wail. Shapes and sizes change according to the plane of incidence that cuts the cone of visual rays or of light rays; but certain properties remain the same throug out such changes, and it is these properties that Desargues studied." (Boyer pg.393)

Fra i numerosi termini nuovi coniati da Desargues l'unico che e" stato accolto in seguito dalla cultura ufficiale è quello di "involuzione fra punti". Ad esempio sei punti di una punteggiata si dicono in involuzione se dato un punto O chiamato "ceppo" si staccano sulla retta sei punti in maniera tale che i rettangoli costruiti sulle tre coppie di segmenti Oa,Oa';Ob,Ob';Oc,Oc'; siano uguali tra loro si abbia cioè Oa*Oa' = Ob*Ob' **=Oc*Oc';(fig.2).**

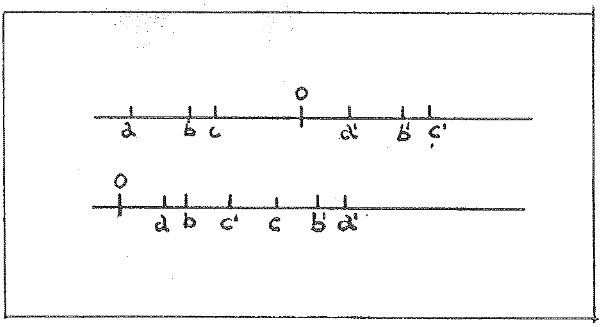
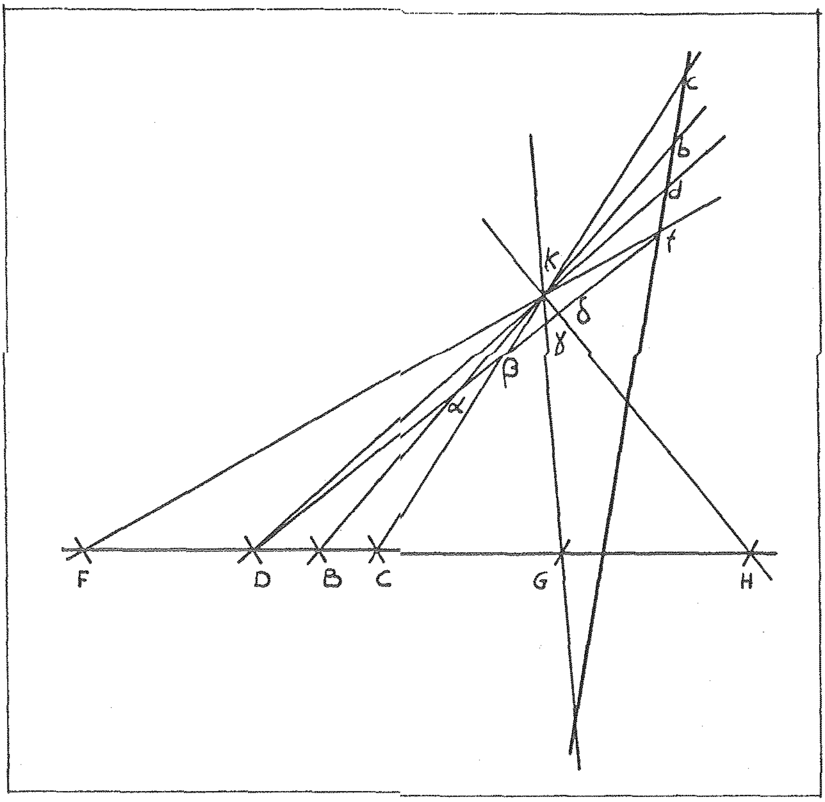


Figura 2,

Il teorema fondamentale della teoria dell'involuzione e che si presenta come un teorema tipicamente proiettivo, considera ciò che accade quando sei punti in involuzione su una retta vengono proiettati su un'altra retta da un punto (centro) posto al finito o all'infinito.

La formulazione di questo teorema e" la seguente:

"Quando in una retta GH per tre coppie di punti B,H;D,F;C,G; disposti tra loro in involuzione passano tre coppie di rette di un medesimo fascio di centro K:FK,DK;BK,HK;CK,GK; queste tre coppie di rette individuano su qualsiasi altra retta che le interseca (non appartenente al fascio) ancora tre coppie di punti b,h;d,f;c,g in involuzione."Freguglia pg. 122)



$$\frac{DB * DH}{FB * FH} = \frac{DC * DG}{FC * FG}$$

$$\frac{db * dh}{fb * fh} = \frac{dc * dg}{fc * fg}$$

Questa dimostrazione ha portato all'enunciato della geometria proiettiva che recita: "L'involuzione e" un'invariante rispetto alle operazioni di proiezione e di sezione".

Come abbiamo accennato in precedenza, alla fine del '600 il Bruillon Projet era completamente sparito dalla circolazione. Solo nel 1847 una copia manoscritta dell'opera fu trovata in una biblioteca parigina, ciò avvenne in un momento di grande interesse per la geometria proiettiva, quella geometria che Desargues, forse prematuramente, aveva tenuto a battesimo.

Il birapporto della quaterna come viene oggi utilizzato dagli psicologi della percezione è dovuto a V. Poncelet che pubblicò nel 1823 la prima sistematizzazione completa della geometria proiettiva. Nel suo "Trattato" Poncelet individua fra le proprietà proiettive delle figure anche alcune proprietà metriche come ad esempio quella che lega quattro punti di una retta in un birapporto che non muta quando la retta è sottoposta ad operazioni di proiezione e di sezione.

Un ultimo contributo, a nostro avviso interessante, e che può aiutare a spiegare il senso in cui la geometria proiettiva viene utilizzata dai fautori della percezione diretta (Cutting 1987), lo si trova nel lavoro di Russel apparso nel 1897 dal titolo "An essay on the fundations of geometry" il cui terzo capitolo e" appunto dedicato alla geometria proiettiva. In esso Russel sostiene che le due cose matematicamente fondamentali nella geometria proiettiva sono "anharmonic ratio (as a metrical property which is unaltered by projection), and the quadrilateral construction. Everything else follows mathematically from these two." (Russel pg 122).

Poiché la geometria proiettiva può tenere conto solo degli attributi qualitativi e" sostanziale considerare " the qualitative substrata of the metrical superstrutture", in quanto "sets of points or of lines, which have the same anharmonic ratio, are treated by projective Geometry as equivalent: this qualitative equivalence replaces the quantitative equality of metrical Geometry". (Russel pg 123).

A questo punto Russel si trova nella necessita" logica di introdurre il concetto di "posizione". Infatti, poiché due figure in relazione proiettiva sono qualitativamente simili ne consegue che esse sarebbero qualitativamente indistinguibili anche se l'intuizione immediata può distinguerle. Russel cosi" conclude il paragrafo 121 " The only reason, within projective Geometry, for not regarding progective figures as actually identical, is the intuitive perception of difference of position. This is fundamental, and must be accepted as a datum. It is presupposed in the distinction of various points,and forms the very life of Geometry. It is, in fact, the essence of the notion of a form of externality, which notion forms the subject-matter of projective Geometry." (Russel pg 131-132).

E' interessante notare che i fautori della percezione diretta, pur rifiutando la teoria causale della percezione e il realismo ingenuo sostenuti in seguito da Russel, si trovano a condividere una nozione di esternalismo quando introducono il concetto di informazione egoriferita e soprattutto quando rifiutano di parlare di percezione di oggetti e preferiscono trattare della percezione di eventi.

La nostra attività percettiva riesce infatti a distinguere di solito nell'osservazione di uno stesso evento quanto è da attribuire al cambiamento di posizione e quanto al cambiamento strutturale dell'oggetto.

Turvey e Show (1979) parlano infatti a tale proposito di due componenti principali di un evento: " la natura e lo stile del cambiamento" e a questi due componenti corrisponderebbero due tipi di informazione invariante, un invariante trasformazionale e un invariante strutturale. La geometria proiettiva è stata pensata come teoria degli invarianti strutturali. Gli invarianti trasformazionali per ora possono solo essere ricondotti a quel datum che Russel definisce "posizione".

REFERENCES

BOYERC.B..(1968).
A history of mathematics. Chiester, England; Wiley.

CUTTING J.E.,(1987).
Perception and information. *Annual Review of Psychology,* 38, 61-90.

FREGUGUAP..(1982).
Fondamenti storici della geometrìa. Milano: Feltrinelli.

HAGEN M.A.,(1986).
Varieties of realism. Cambridge, London, New York: Cambridge Univ. Press.

KUBGVY M.,(1986).
The psychology of perspective and Renaissance art. Cambridge, London, New York: Cambridge Univ. Press.

MASSIRONI M.,(1983).
Considerazioni psicologiche su alcuni fenomeni della visione descritti nei trattati di prospettiva dei secoli XV, XVII. *Storia e critica della psicologia,* a. IV, n. 2, 171-214.

PASTORE N., (1979).
On Brunelleschi's perspective "experiments" or demonstrations. *Italian Journal of Psychology,* 5, 157-180.

PASTORE N.,(1984).
Alberti and the camera obscura *Physis,* fas. 2, 259-269.

PIRENNE M.H., (1970).
The scientific basis of Leonardo da Vinci's theory of perspective. *British Journal of Philosophy of Science,* 3, 169-185.

PIRENNE M.H.,(1970).
Optic Painting & Photography. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

RUSSEL,B.A.W.,(1987).
An essay on the foundations of geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

TURVEY M.T. & SHAW R., (1979).
The primacy of perceiving: an ecological reformulation of perception for understanding memory. In L. Nilsson (Ed.). *Perspectives in memory research: Essays in honor of Uppsala University's 500th anniversary.* Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

SUMMARY. *Tra gli psicologi sperimentali che per spiegare fenomeni percettivi fanno riferimento alle potenzialità euristiche del concetto di invarianza, è assai difficile trovare un resoconto esaustivo della sua genesi storica e completamente assenti sonale fonti originali attorno a quel particolare invariante geometrico denominato Birapporto della Quaterna (BdQ).*

Con questo primo contributo ci è sembrato utile ripercorrere, seppure in maniera assai sintetica, il percorso che nel pensiero matematico-geometrico, ha portato alla scoperta degli invarianti geometrici e in particolare del Birapporto della Quaterna,

E' nostra intenzione, nei prossimi numeri dì questa rivista, pubblicare alcuni contributi sperimentali attorno alla validità e estensività dell'invariante denominato Birapporto della Quaterna.

RIASSUNTO. *Among the experimental psychologists who refer to the heuristic potential of the invariance concept to explain the perceptual phenomenon, it is rather difficult to find an exhaustive description of the historical genesis and furthermore, there is no original source regarding that particular geometric invariant known as Cross-Ratio (CR).*

With this first paper we thought it useful to retrace, even though synthetically, the tracks that the mathematical-geometric though has brought to bear on the discovery of the geometric invariants, in particular the Cross Ratio.

It is our aim to publish a few experimental papers concerning the validity and extensiveness of the Cross Ratio invariant in future issues of this journal.